

Egzamin z Rachunku prawdopodobieństwa – 30.08.2023

Z poniższych zadań należy wybrać 5. W przypadku oddania 6 zadań do końcowej punktacji będzie liczyć się 5 ocenionych najniżej. Za każde zadanie można otrzymać max. 12 punktów.

Rozwiązania zadań prosimy oddawać na oddzielnych kartkach podpisanych **czytelnie** imieniem i nazwiskiem oraz numerem indeksu. Należy dokładnie uzasadniać odpowiedzi. Wyniki należy podawać w postaci zwartych wzorów, a w przypadku odpowiedzi liczbowych, ostatecznych wyników numerycznych. Odpowiedzi mogą być udzielane w terminach dystrybucyj standardowej zmiennej gaussowskiej.

Czas trwania: 180 minut

A1. Zmienne losowe ε, X, Y są niezależne, ε spełnia $\mathbb{P}(\varepsilon = 1) = \mathbb{P}(\varepsilon = -1) = 1/2$, X ma gęstość $g(x) = \frac{1}{x^2}1_{[1, \infty)}(x)$, zaś Y ma rozkład jednostajny na przedziale $[0, 1]$.

- (a) Wyznaczyć gęstość zmiennej $Z = \varepsilon(X - Y)$.
- (b) Obliczyć $\text{Med } Z$ oraz $\mathbb{E}|Z|$.

A2. Drużyna harcerska składa się z n druhów i n druhen ($n \geq 3$). Harcerze ustawili się losowo w krąg wokół ogniska. Niech X oznacza liczbę druhów, którzy stoją między dwiema druhnami. Obliczyć wartość oczekiwaną i wariancję zmiennej X .

Uwaga: Odpowiedź wystarczy wyrazić w postaci jawnej, wymiernej funkcji parametru n .

A3. Bolek i Lolek rzucają na przemian kostką (zaczyna Bolek) do momentu, gdy Lolek wyrzuci szóstkę. Niech X oznacza łączną liczbę rzutów wykonanych przez Bolka, zaś Y łączną liczbę wyrzuconych przez niego oczek. Obliczyć

- (a) $\mathbb{E}(Y|X)$,
- (b) $\mathbb{E}Y$,
- (c) $\mathbb{P}(X \text{ i } Y \text{ są parzyste})$.

A4. Wektor losowy (X, Y) ma gęstość $g(x, y) = C|y|1_{\{|x|+|y|\leq 1\}}$.

- (a) Wyznaczyć stałą C .
- (b) Obliczyć $\mathbb{P}(Y \geq \frac{1}{2})$.
- (c) Obliczyć $\mathbb{E}((X + Y)^2|Y)$.

A5. Z kwadratu o wierzchołkach $(0, 0), (1, 0), (1, 1), (0, 1)$ wylosowano niezależnie punkty $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots$, zgodnie z prawdopodobieństwem geometrycznym. Niech Z_n oznacza pole prostokąta o wierzchołkach $(0, 0), (X_n, 0), (X_n, Y_n), (0, Y_n)$. Zbadać zbieżność prawie na pewno ciągu

$$\frac{Z_1 + \dots + Z_n}{\sqrt{X_1^2 + \dots + X_n^2} \sqrt{Y_1^2 + \dots + Y_n^2}}.$$

A6. Robin Hood i szeryf z Nottingham strzelają z łuku do odległego celu. Każdy z nich oddaje 900 strzałów. Prawdopodobieństwo, że Robin spudłuje wynosi $1/900$, zaś prawdopodobieństwo, że spudłuje szeryf wynosi $1/10$. Obliczyć w przybliżeniu

- (a) prawdopodobieństwo, że Robin spudłuje więcej niż 2 razy,
- (b) prawdopodobieństwo, że szeryf odda więcej niż 820 celnych strzałów.